Kongruente Flächen 2. Ordnung mit gemeinsamer Ellipse.

Ort ihrer Mittelpunkte. Überführung einer von diesen Flächen in die unendlich benachbarte Lage durch Schraubung.

Von

Dr. Georg Diem,

Kgl. Gymnasiallehrer.

Programm

des

K. Humanistischen Gymnasiums zu Lohr a. M.

für das

Schuljahr 1903/04.

J. M. Richter's Graph. Kunstanstalt, Würzburg.

Vorwort.

Diese Abhandlung bildet in ihren ersten Paragraphen eine Umkehrung des Problems, mit dem ich mich in meiner, der philosophischen Fakultät der Universität München im Dezember 1898 vorgelegten Dissertation: „Über Ellipsen auf einem Ellipsoid, deren Achsen gegebenen einfachen Bedingungen genügen, insbesondere über kongruente Ellipsen“ beschäftigte. Während in diesem Falle das Ellipsoid fest und die Ellipse beweglich ist, wird jetzt das Ellipsoid beweglich und die Ellipse fest angenommen. Es wird dann zunächst der Ort der Mittelpunkte kongruenter Ellipsoide mit gemeinsamer Ellipse bestimmt. In den weiteren Paragraphen wird die Überführung einer allgemeinen Fläche 2. Ordnung in die ihr unendlich benachbarte Lage betrachtet unter der Voraussetzung, dass die Fläche in ihrer ursprünglichen und in ihrer neuen Lage dieselbe Ellipse gemeinsam hat. Es sind dadurch zugleich zwei kongruente Räume definiert, deren Punkte eindeutig aufeinander bezogen sind und deren Eigenschaften eingehend studiert werden. Wir haben damit ein grösseres Beispiel für die allgemeine Theorie der Windungsbewegung eines unveränderlichen Systems, wie dieselbe z. B. bei Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte I. Band, 2. Auflage, Teubner, gegeben ist. Die auf analytischem Wege gefundenen Sätze sind nach diesem Lehrbuch zitiert. Den Schluss bilden die Anwendung auf einen speziellen Fall für das Ellipsoid und die daraus sich ergebenden geometrischen Folgerungen.

Inhalt.

Seite

§ 1. Ort der Mittelpunkte kongruenter Ellipsoide mit gemeinsamer Ellipse 1
§ 2. Fall, in welchem die Ellipse in einen Kreis übergeht . . 5
Fall, in welchem die Ellipse unendlich klein wird . . . 6
§ 3. Gleichung des Ellipsoides mit dem Parameter P in den Coëfficienten 8
§ 4. Die Projektion einer Ellipse auf eine zu ihrer Ebene unendlich benachbarten Ebene. Bedingung der Kongruenz zweier benachbarter Ellipsen auf einer Fläche 2. Ordnung 9
§ 5. Mittelpunkt und Achsenrichtungen der benachbarten kongruenten Ellipse. Gleichungen derselben in Parameterform 11
§ 6. Zwei kongruente Räume, welche dadurch aufeinander bezogen sind, dass eine Ellipse des einen Raumes und die ihr entsprechende des anderen Raumes auf derselben Fläche 2. Ordnung in benachbarter Lage sich befinden. Die der F_2 entsprechende Fläche 13
§ 7. Bemerkenswerte Fortschreitungsrichtungen.
I. Punkte, welche auf der F_2 bleiben 15
II. Fortschreitungsrichtungen der Punkte einer Ebene 16
III. Fortschreitungsrichtungen der Punkte einer Geraden 22
IV. Ort der Fortschreitungsrichtungen, die durch einen gegebenen Punkt gehen 25
§ 8. Überführung der Punkte des Raumes Σ_2 aus der Lage I in die Lage II durch Rotation um zwei rechtwinklig gekreuzte Achsen oder durch eine Schraubung 27
§ 9. Die XY-Ebene als Null-Ebene. Geometrische Deutung der gefundenen Werte. Der Fall $L = 0$ 32
§ 10. Schlussbemerkung 36

§ 1.

Ort der Mittelpunkte kongruenter Ellipsoide mit gemeinsamer Ellipse.

Gegeben sei die Gleichung des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 1,$$

bezogen auf seine Hauptachsen als Koordinatenachsen. Wir wollen die Gleichung dieses Ellipsoides aufsuchen, bezogen auf ein beliebiges Koordinatensystem X, Y, Z.

Nach den Formeln über die Koordinatentransformation ist dann zu setzen:

$$x = (X - m)\,\alpha_1 + (Y - n)\,\alpha_2 + (Z - p)\,\alpha_3$$

$$y = (X - m)\,\beta_1 + (Y - n)\,\beta_2 + (Z - p)\,\beta_3$$

$$z = (X - m)\,\gamma_1 + (Y - n)\,\gamma_2 + (Z - p)\,\gamma_3$$

Hiebei sind m, n, p die Koordinaten des Mittelpunktes des Ellipsoides im System X, Y, Z und α_1, α_2, α_3 etc. die Richtungscosinuse der alten Achsen mit den neuen. Setzen wir die Werte von x, y, z in 1 ein und ordnen nach X, Y, Z, so geht die Gleichung des Ellipsoides über in:

$$\frac{X^2}{r_1^2} + \frac{Y^2}{r_2^2} + \frac{Z^2}{r_3^2} + 2\,X\,Y\left(\frac{\alpha_1\,\alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_1\,\beta_2}{b^2} + \frac{\gamma_1\,\gamma_2}{c^2}\right) + 2\,X\,Z\left(\frac{\alpha_1\,\alpha_3}{a^2} + \frac{\beta_1\,\beta_3}{b^2} + \frac{\gamma_1\,\gamma_3}{c^2}\right) + 2\,Y\,Z\left(\frac{\alpha_2\,\alpha_3}{a^2} + \frac{\beta_2\,\beta_3}{b_2} + \frac{\gamma_2\,\gamma_3}{c^2}\right) - 2\,X \left(\frac{\alpha_1}{a^2}A + \frac{\beta_1}{b^2}B + \frac{\gamma_1}{c^2}C\right) - 2\,Y\left(\frac{\alpha_2}{a^2}A + \frac{\beta_2}{b^2}B + \frac{\gamma_2}{c^2}C\right) - 2\,Z \left(\frac{\alpha_3}{a^2}A + \frac{\beta_3}{b^2}B + \frac{\gamma_3}{c^2}C\right) + \frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} + \frac{C^2}{c^2} - 1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad 2$$

Dabei ist A Abkürzung für $m\alpha_1 + n\alpha_2 + p\alpha_3$
B „ „ $m\beta_1 + n\beta_2 + p\beta_3$
C „ „ $m\gamma_1 + n\gamma_2 + p\gamma_3$

ferner $\frac{1}{r_1^2} = \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}$, $\frac{1}{r_2^2} = \frac{\alpha_2^2}{a^2} + \frac{\beta_2^2}{b^2} + \frac{\gamma_2^2}{c^2}$,

$$\frac{1}{r_3^2} = \frac{\alpha_3^2}{a^2} + \frac{\beta_3^2}{b^2} + \frac{\gamma_3^2}{c^2},$$

wo r_1, r_2, r_3 die Längen der Halbmesser des Ellipsoides parallel der X-, Y- und Z-Achse bedeuten. Zwischen den Halbmessern besteht die Relation:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Für $Z = 0$ erhalten wir die Gleichung der Schnittkurve mit der XY-Ebene, nämlich:

$$\frac{X^2}{r_1^2} + \frac{Y^2}{r_2^2} + 2XY\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_1\beta_2}{b^2} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{c^2}\right) - 2X\left(\frac{\alpha_1}{a^2}A + \frac{\beta_1}{b^2}B + \frac{\gamma_1}{c^2}C\right)$$
$$-2Y\left(\frac{\alpha_2}{a^2}A + \frac{\beta_2}{b^2}B + \frac{\gamma_2}{c^2}C\right) + \frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} + \frac{C^2}{c^2} - 1 = 0 \ldots .$$

Soll nun das Ellipsoid die Ellipse mit der Gleichung $\frac{X^2}{l_1^2} + \frac{Y^2}{l_2^2} = 1$ aus der XY-Ebene ausschneiden, so bestehen zwischen den Coëfficienten beider Gleichungen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\alpha_1\alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_1\beta_2}{b^2} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{c^2} = 0\\
&\frac{\alpha_1 A}{a^2} + \frac{\beta_1 B}{b^2} + \frac{\gamma_1 C}{c^2} = \frac{m}{r_1^2} + p\left(\frac{\alpha_1\alpha_3}{a^2} + \frac{\beta_1\beta_3}{b^2} + \frac{\gamma_1\gamma_3}{c^2}\right) = 0\\
&\frac{\alpha_2 A}{a^2} + \frac{\beta_2 B}{b^2} + \frac{\gamma_2 C}{c^2} = \frac{n}{r_2^2} + p\left(\frac{\alpha_2\alpha_3}{a^2} + \frac{\beta_2\beta_3}{b^2} + \frac{\gamma_2\gamma_3}{c^2}\right) = 0\\
&1 - \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2}{b^2} - \frac{C^2}{c^2} = 1 + \frac{m^2}{r_1^2} + \frac{n^2}{r_2^2} - \frac{p^2}{r_3^2} = \frac{l_1^2}{r_1^2} = \frac{l_2^2}{r_2^2}
\end{aligned}\right\} \ldots . 3$$

Dazu kommt die Bedingung $l_1 l_2 = \frac{abc}{P}\left(1 - \frac{p^2}{P^2}\right) \ldots . 4$

die Inhaltsformel für eine Ellipse auf dem Ellipsoid (abgesehen von π), wenn P den Abstand des Mittelpunktes des Ellipsoides von der zur Ebene der Ellipse parallelen Tangentialebene an das Ellipsoid bedeutet.

Für unseren Fall ist $P^2 = a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2$.

Wir suchen nun aus 3 die Koordinaten m, n, p des Mittelpunktes als Funktionen des Parameters P darzustellen.

Es ergibt sich aus 3.)

$A : B : C = a^2(\beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2) : b^2(\gamma_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_2) : c^2(\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)$

oder $\quad = a^2 \alpha_3 : b^2 \beta_3 : c^2 \gamma_3$

daher
$$\left.\begin{aligned} A &= \sigma a^2 \alpha_3 \\ B &= \sigma b^2 \beta_3 \\ C &= \sigma c^2 \gamma_3 \end{aligned}\right\} \ldots 5,$$
wo σ Proportionalitätsfaktor ist.

Aus diesen Relationen folgt unter Berücksichtigung von 3 und 5:

$A \alpha_3 + B \beta_3 + C \gamma_3 = p = \sigma(a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2) = \sigma P^2$

daher $\sigma = p : P^2$

ferner:
$$\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} + \frac{C^2}{c^2} = 1 - \frac{l_1^2}{r_1^2} = 1 - \frac{l_2^2}{r_2^2} = \sigma^2 P^2 = \frac{p^2}{P^2}$$
$$= \frac{p^2}{r_3^2} - \frac{m^2}{r_1^2} - \frac{n^2}{r_2^2} \ldots . 6$$

daher $\frac{l_1^2}{r_1^2} = \frac{l_2^2}{r_2^2} = 1 - \frac{p^2}{P^2}$ oder nach 4

$$\frac{l_1^2}{r_1^2} = \frac{l_2^2}{r_2^2} = \frac{l_1 l_2 P}{abc} \text{ somit } \frac{1}{r_1^2} = \frac{P}{abc} \frac{l_2}{l_1}, \quad \frac{1}{r_2^2} = \frac{P}{abc} \frac{l_1}{l_2} \ldots . 7$$

Aus Gleichung 6 ergibt sich dann:

$$\frac{m^2}{r_1^2} + \frac{n^2}{r_2^2} = p^2 \left(\frac{1}{r_3^2} - \frac{1}{P^2}\right)$$

oder
$$\frac{m^2 P l_2}{abc\, l_1} + \frac{n^2 P l_1}{abc\, l_2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{P}{abc} \frac{l_2}{l_1} - \frac{P}{abc} \frac{l_1}{l_2} - \frac{1}{P^2}\right)$$
$$\left(1 - \frac{l_1 l_2 P}{abc}\right) P^2 \text{ (nach 4)}$$

oder
$$\frac{m^2}{l_1^2} + \frac{n^2}{l_2^2} = \frac{abc}{P l_1 l_2}\left(1 - \frac{l_1 l_2 P}{abc}\right)\left[-1 + P^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{P^3 (l_1^2 + l_2^2)}{abc\, l_1 l_2}\right] \ldots . 8.$$

Aus 5 folgt weiter:

$$A^2 + B^2 + C^2 = m^2 + n^2 + p^2 = \frac{p^2}{P^4}(a^4 \alpha_3^2 + b^4 \beta_3^2 + c^4 \gamma_3^2)$$
$$= \frac{1}{P^2}\left(1 - \frac{l_1 l_2 P}{abc}\right)(a^4 \alpha_3^2 + b^4 \beta_3^2 + c^4 \gamma_3^2)$$

Nun ist $a^2 P^2 = a^4 \alpha_3{}^2 + a^2 b^2 \beta_3{}^2 + a^2 c^2 \gamma_3{}^2$

$b^2 P^2 = a^2 b^2 \alpha_3{}^2 + b^4 \beta_3{}^2 + b^2 c^2 \gamma_3{}^2$

$c^2 P^2 = a^2 c^2 \alpha_3{}^2 + b^2 c^2 \beta_3{}^2 + c^4 \gamma_3{}^2$

also $(a^2 + b^2 + c^2) P^2 = a^4 \alpha_3{}^2 + b^4 \beta_3{}^2 + c^4 \gamma_3{}^2 + a^2 b^2 (1 - \gamma_3{}^2)$

$+ b^2 c^2 (1 - \alpha_3{}^2) + a^2 c^2 (1 - \beta_3{}^2)$

$$= a^4 \alpha_3{}^2 + b^4 \beta_3{}^2 + c^4 \gamma_3{}^2 + a^2 b^2 c^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{r_3{}^2}\right)$$

$$= a^4 \alpha_3{}^2 + b^4 \beta_3{}^2 + c^4 \gamma_3{}^2 + a^2 b^2 c^2 \left(\frac{1}{r_1{}^2} + \frac{1}{r_2{}^2}\right)$$

$$= a^4 \alpha_3{}^2 + b^4 \beta_3{}^2 + c^4 \gamma_3{}^2 + \frac{abc\ P}{l_1\, l_2} (l_1{}^2 + l_2{}^2)$$

Es ist daher $m^2 + n^2 + p^2 = m^2 + n^2 + P^2 \left(1 - \frac{l_1 l_2 P}{abc}\right)$

$$= \frac{1}{P^2}\left(1 - \frac{l_1 l_2 P}{abc}\right)\left[(a^2 + b^2 + c^2) P^2 - \frac{abc\,P}{l_1\, l_2}(l_1{}^2 + l_2{}^2)\right]$$

oder $m^2 + n^2 = \frac{1}{P}\left(1 - \frac{l_1 l_2 P}{abc}\right)$

$$\left[- \frac{abc}{l_1\, l_2}(l_1{}^2 + l_2{}^2) + (a^2 + b^2 + c^2) P - P^3\right] \ldots\ldots 9.$$

Aus der Auflösung der Gleichungen 8 und 9 erhalten wir:

$$m^2 = \frac{1}{l_1{}^2 : l_2{}^2 - 1} \cdot \frac{1}{P}\left(1 - \frac{l_1\, l_2\, P}{abc}\right)$$

$$\left\{P^3 - \frac{l_1}{l_2} abc P^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{l_1{}^2}{l_2{}^2}(a^2 + b^2 + c^2) P - abc \frac{l_1{}^3}{l_2{}^3}\right\}$$

$$n^2 = \frac{1}{l_2{}^2 : l_1{}^2 - 1} \cdot \frac{1}{P}\left(1 - \frac{l_1\, l_2\, P}{abc}\right)$$

$$\left\{P^3 - \frac{l_2}{l_1} abc P \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{l_2{}^2}{l_1{}^2}(a^2 + b^2 + c^2) P - abc \frac{l_2{}^3}{l_1{}^2}\right\} \ldots . 10.$$

Die Ausdrücke in der geschlungenen Klammer lassen sich in drei Faktoren zerlegen. Setzen wir noch $l_1 : l_2 = \mu$, so sind also die Gleichungen für den Ort der Mittelpunkte kongruenter Ellipsoide mit der gemeinsamen Ellipse $\frac{X^2}{l_1{}^2} + \frac{Y^2}{l_2{}^2} = 1$:

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{\mu^2 - 1} \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{l_1\, l_2}{abc}\left(\frac{abc}{l_1\, l_2} - P\right)\left(P - \frac{bc}{a}\mu\right)\left(P - \frac{ac}{b}\mu\right)\left(P - \frac{ab}{c}\mu\right) \\ n^2 &= \frac{1}{1 : \mu^2 - 1} \cdot \frac{1}{P} \frac{l_1\, l_2}{abc}\left(\frac{abc}{l_1\, l_2} - P\right)\left(P - \frac{bc}{a} \cdot \frac{1}{\mu}\right)\left(P - \frac{ac}{b} \cdot \frac{1}{\mu}\right)\left(P - \frac{ab}{c} \cdot \frac{1}{\mu}\right) \\ p^2 &= \frac{l_1\, l_2}{abc}\left(\frac{abc}{l_1\, l_2} - P\right) P^2 \end{aligned}\right\} \ldots . 11.$$

Die Kurve schneidet die beliebige Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0$ in 16 Punkten, sie ist also von der 16. Ordnung. Sie hat einen vierfachen Punkt im Anfangspunkt.

Anm. Setzt man in den Gleichungen 11 statt $l_1 l_2$ den Wert $q\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)$, wo q die halbe Seite des der Ellipse $\frac{x^2}{l_1^2} + \frac{y^2}{l_1^2} = 1$ einbeschriebenen Quadrates bedeutet, so erhält man für ein variables μ und P eine Fläche, nämlich den Ort der Mittelpunkte kongruenter Ellipsoide, welche die vier Ecken eines Quadrates gemeinsam haben.

---

§ 2.

Fall, in welchem die Ellipse in einen Kreis übergeht.

Wenn $\mu = 1$ ist, also $l_1 = l_2$, so ist die Ellipse in einen Kreis übergegangen.

In diesem Falle gehen die Gleichungen 8 und 9 über in

$$m^2 + n^2 = \frac{1}{P}\left(1 - \frac{l_1^2 P}{abc}\right)\left\{- abc + abc\, P^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - 2 P^3\right\}$$

und 12

$$m^2 + n^2 = \frac{1}{P}\left(1 - \frac{l_1^2 P}{abc}\right)\left\{- 2\, abc + (a^2 + b^2 + c^2)\, P - P^3\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Beide Gleichungen stellen uns Kreiscylinder dar, die denselben Radius haben müssen. Also ist:

$$- abc + abc\, P^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - 2 P^3 = - 2\, abc + (a^2 + b^2 + c^2)\, P - P^3$$

$$\text{oder } P^3 - abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) P^2 + (a^2 + b^2 + c^2)\, P - abc = 0$$

$$\text{oder } \left(P - \frac{bc}{a}\right)\left(P - \frac{ac}{b}\right)\left(P - \frac{ab}{c}\right) = 0.$$

Wenn also $\mu = 1$ ist, muss P konstant sein und die Werte $\frac{bc}{a}, \frac{ac}{b}, \frac{ab}{c}$ haben. Vermöge dieser Bedingungen werden also m und n in den Gleichungen 11 unbestimmt, dagegen ist nach 12:

$$m^2 + n^2 = -(a^2 - l_1{}^2)(a^2 - c^2)(a^2 - b^2) : a^4 \quad \text{für } P = bc : a$$
$$m^2 + n^2 = (b^2 - l_1{}^2)(a^2 - b^2)(b^2 - c^2) : b^4 \quad \text{für } P = ac : b$$
$$m^2 + n^2 = -(c^2 - l_1{}^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) : c^4 \quad \text{für } P = ab : c.$$

Es zerfällt also die Kurve der Mittelpunkte in 6 Kreise, von welchen jedoch nur die dem Werte $P = ac : b$ entsprechenden zwei Kreise für $l_1 \leqq b$ reell sind. Ihnen kommen die Gleichungen zu: $m^2 + n^2 = (b^2 - l_1{}^2)(a^2 - b^2)(b^2 - c^2) : b^4$

$$p^2 = (b^2 - l_1{}^2)\, a^2 c^2 : b^4.$$

Fall, in welchem die Ellipse unendlich klein wird.

Die Gleichungen 11 für den Ort der Mittelpunkte werden einfacher, wenn $l_1 = l_2 = 0$ ist, das Verhältnis $l_1 : l_2 = \mu$ aber einen bestimmten Wert hat. In diesem Falle berührt das Ellipsoid die XY-Ebene und zwar sind die X- und Y-Achse Tangenten an die beiden Krümmungslinien, die durch den Berührungspunkt hindurchgehen.

Die Gleichung der Kurve wird dann:

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{\mu^2 - 1} \cdot \frac{1}{P}\left(P - \frac{bc}{a}\mu\right)\left(P - \frac{ac}{b}\mu\right)\left(P - \frac{ab}{c}\mu\right) \\ n^2 &= \frac{1}{1 : \mu^2 - 1} \cdot \frac{1}{P}\left(P - \frac{bc}{a}\frac{1}{\mu}\right)\left(P - \frac{ac}{b}\frac{1}{\mu}\right)\left(P - \frac{ab}{c}\frac{1}{\mu}\right) \\ p^2 &= P^2 \text{ oder } p = \pm P \end{aligned}\right\} \; \ldots\ldots 13$$

Diese Kurve ist von der 12. Ordnung. Es haben sich 4 durch den Anfangspunkt gehende Grade abgespalten. Sie zerfällt in 2 zur XY-Ebene symmetrisch gelegene Kurven 6. Ordnung. Die eine Kurve gibt den Ort der Mittelpunkte der oberhalb der XY-Ebene berührenden Ellipsoide, die andere den der unterhalb berührenden Ellipsoide.

Für $\mu = 1$ erhalten wir wieder 6 Kreise, von denen jedoch nur 2 reell sind, deren Gleichungen lauten:

$$m^2 + n^2 = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2) : b^2 \qquad z = \pm ac : b.$$

Die Kurve mit den Gleichungen 13 liegt auf 2 Ellipsoiden, d. h. jede der Kurven 6. Ordnung auf dem zugehörigen. Multipliziert man nämlich die 1. Gleichung mit $\mu^2 - 1$, die zweite mit $\mu^2 (1 - \mu^2)$ und subtrahieren wir die so erhaltenen Produkte, so ergibt sich, wenn wir für m, n, p die Buchstaben x, y, z setzen, die Gleichung:

$$x^2 + \mu y^2 + z^2 (1 + \mu^2 + \mu^4) \mp \mu\, abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)(1 + \mu^2)\, z + (a^2 + b^2 + c^2)\, \mu^2 = 0.$$

Figur 1 gibt für einen einfachen Fall die Form der Kurve 13.

Ist nämlich $l_1 = l_2 = 0$, $b^2 = ac$, $l_1 : l_2 = a : b = b : c = \mu$, so werden die Gleichungen der Kurve

$$x^2 = \frac{c}{a-c} \cdot \frac{1}{P} \left(\frac{a^2}{c} - P\right)(a - P)(P - c)$$

$$y^2 = \frac{a}{a-c}\ \frac{1}{P}(a - P)(P - c)\left(P - \frac{c^2}{a}\right)$$

$$z = P.$$

Da nur die Werte des Parameters P zwischen a und c reelle Punkte der Raumkurve geben, so erhalten wir die in der Figur 1 gezeichnete Gestalt derselben im 1. Oktanten und ihre Projektion auf die XY-Ebene.

Auf dem Ellipsoid kommen der Reihe nach die Punkte der Kurve, für welche das Verhältnis der Hauptkrümmungsradien ein konstantes, nämlich a:c ist, mit dem Anfangspunkt zum Zusammenfallen. Diese Kurve hat die in Figur 2 angegebene Gestalt (auf der Vorderseite des Ellipsoides)*).

---

*) cfr. Dissertation, § 7.

§ 3.

Gleichung des Ellipsoides mit dem Parameter P in den Coëfficienten.

Die Gleichung 2 des Ellipsoides kann so umgeformt werden, dass ihre Coëfficienten Funktionen des Parameters P werden.

Unter Berücksichtigung der Relationen 3, 4, 6 und 7 von § 1 erhalten wir:

$$X^2 \frac{l_2}{l_1} \frac{P}{abc} + Y^2 \frac{l_1}{l^2} \frac{P}{abc} + Z^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{P}{abc} \frac{l_1}{l_2} - \frac{P}{abc} \frac{l_2}{l_1}\right)$$

$$- 2 XZ \frac{m}{p} \cdot \frac{P}{abc} \frac{l_2}{l_1} - 2 YZ \frac{n}{p} \cdot \frac{P}{abc} \frac{l_1}{l_2} - 2 Z \frac{p}{P^2} - \frac{P}{abc} l_1 l_2 = 0,$$

oder wenn wir die Werte von m, n und p einsetzen:

$$\frac{X^2}{l_1^2} + \frac{Y^2}{l_2^2} + Z^2 \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \frac{abc}{l_1 l_2 P} - \frac{1}{l_1^2} - \frac{1}{l_2^2}\right]$$

$$- \frac{2 XZ}{l_1^2} \sqrt{\frac{\left(P - \frac{bc}{a} \mu\right)\left(P - \frac{ac}{b} \mu\right)\left(P - \frac{ab}{c} \mu\right)}{P^3 (\mu^2 - 1)}}$$

$$- 2 \frac{YZ}{l_2^2} \sqrt{\frac{\left(P - \frac{bc}{a} \frac{1}{\mu}\right)\left(P - \frac{ac}{b} \frac{1}{\mu}\right)\left(P - \frac{ab}{c} \frac{1}{\mu}\right)}{P^3 (1 : \mu^2 - 1)}}$$

$$- \frac{2 Z}{P^2} \sqrt{\frac{l_1 l_2}{abc} \left(\frac{abc}{l_1 l_2} - P\right)} - 1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; 14.$$

Indem wir hier P variieren, erhalten wir immer Ellipsoide mit den Halbachsen a, b, c, die die Ellipse $\frac{X^2}{l_1^2} + \frac{Y^2}{l_1^2} = 1$ gemeinsam haben.

Anm. Die Ableitung der bisherigen Formeln gilt für jede Mittelpunktsfläche 2. Ordnung.

Wir gehen nun zur Betrachtung zweier kongruenter allgemeiner Flächen 2. Ordnung mit gemeinsamer Ellipse in unendlich benachbarter Lage über.

---

§ 4.

Die Projektion einer Ellipse auf eine zu ihrer Ebene unendlich benachbarten Ebene. Bedingung der Kongruenz zweier benachbarter Ellipsen auf einer Fläche 2. Ordnung.

Proiziert man eine Ellipse auf eine beliebige Ebene, so werden die Projektionen der Achsen der Ellipse jedenfalls konjugierte Durchmesser der Projektionskurve.

Sind α_1 β_1 γ_1 die Richtungswinkel der einen Achse der Ellipse mit den 3 Koordinatenachsen, α_2 β_2 γ_2 die Richtungswinkel der anderen Achse, so ist wegen der Rechtwinkligkeit $\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0$.

Für den Winkel ϑ, den die Projektionen der Achsen auf die als XY-Ebene angenommene Ebene bilden, gilt der Ausdruck:

$$\cos\vartheta = \operatorname{ctg}\gamma_1 \operatorname{ctg}\gamma_2.$$

Die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt geht und der XY-Ebene unendlich benachbart ist, kann in der Form geschrieben werden:

$$x\frac{dp}{m} + y\frac{dp}{n} + z = 0,$$

wo m und n endliche Grössen sind, dp dagegen unendlich klein von der 1. Ordnung ist. Soll diese Ebene die Ebene obiger Ellipse sein, mit ihrem Mittelpunkt als Anfangspunkt, so müssen die Gleichungen

$$\cos\alpha_1\frac{dp}{m} + \cos\beta_1\frac{dp}{n} + \cos\gamma_1 = 0 \text{ und}$$

$$\cos\alpha_2\frac{dp}{m} + \cos\beta_2\frac{dp}{n} + \cos\gamma_2 = 0 \text{ bestehen.}$$

Daraus folgt, dass $\cos\gamma_1$ und $\cos\gamma_2$ unendlich klein sind von der 1. Ordnung, somit $\cos\vartheta = \operatorname{ctg}\gamma_1 \operatorname{ctg}\gamma_2$ unendlich klein von der 2. Ordnung.

Wir dürfen also, wenn wir uns auf unendlich Kleines 1. Ordnung beschränken, $\cos\vartheta$ als Null, ϑ als 90^0 voraussetzen, und der Fehler, den wir dabei machen, ist höchstens von der 2. Ordnung.

Es proiizieren sich also die Achsen der Ellipse wieder als Achsen ihrer Projektion. Da sich auch die Projektionen

der Achsenlängen nur um unendlich kleines 2. Ordnung von den ursprünglichen Längen unterscheiden, so bleiben also durch die Projektion auf die benachbarte Ebene Achsen und Achsenlängen erhalten, wir können somit die Projektion der Ellipse als ihr kongruent ansehen. Der dabei gemachte Fehler ist höchstens von der 2. Ordnung.

Dieses vorausgesetzt wollen wir nun die Achsenlängen einer Ellipse auf einer Fläche 2. Ordnung berechnen, die einer anderen Ellipse auf ihr benachbart ist und dabei nur Grössen, die unendlich klein sind von der 1. Ordnung in dp, berücksichtigen.

Es sei die Gleichung der Fläche 2. Ordnung

$$F = \frac{x^2}{l_1^2} + \frac{y^2}{l_2^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xz}{d^2} + \frac{2yz}{f^2} + \frac{2z}{g} - 1 = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; 15.$$

Die Fläche schneidet also die XY-Ebene nach der Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{l_1^2} + \frac{y^2}{l_2^2} = 1.$$

Die Gleichung einer zur XY-Ebene benachbarten Ebene sei

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{dp} = 1 \;.\;.\;.\;.\;.\; 16,$$

wo m und n die endlichen Abschnitte auf der X- und Y-Achse sind, dp den unendlich kleinen Abschnitt auf der Z-Achse bedeutet.

Wir kennen nun nach dem Hilfsatz die Achsen der Ellipse, welche die Ebene 16 aus der Fläche ausschneidet, sobald wir die Achsen ihrer Projektion auf die XY-Ebene berechnet haben.

Durch Elimination von Z aus 15 und 16 erhalten wir die Gleichung der Projektion:

$$x^2\left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{2}{d^2}\frac{dp}{m}\right) + y^2\left(\frac{1}{l_2^2} - \frac{2}{f^2}\frac{dp}{n}\right) - 2\,xy\,dp\left(\frac{1}{d^2 n} + \frac{1}{f^2 m}\right)$$

$$+ 2x\,dp\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{gm}\right) + 2y\,dp\left(\frac{1}{f^2} - \frac{1}{gn}\right) + \frac{2dp}{g} - 1 = 0 \;.\;.\;.\;.\; 17.$$

Vernachlässigen wir nun bei der Reduktion der Gleichung dieses Kegelschnitts auf die Hauptachsen die Glieder mit dp in den 2. und höheren Potenzen, so geht Gleichung 17 über in:

$$\left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{2\,dp}{d^2 m}\right)X^2 + \left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{2\,dp}{f^2 n}\right)Y^2 + \frac{2\,dp}{g} - 1 = 0.$$

Die Achsenlängen $2\,L_1$ und $2\,L_2$ dieser Ellipse sind also gegeben durch die Relationen

$$\begin{aligned} L_1 &= l_1 \left[1 - dp\left(\frac{1}{g} - \frac{l_1^2}{d^2\,m}\right)\right] \\ L_2 &= l_2 \left[1 - dp\left(\frac{1}{g} - \frac{l_2^2}{f^2\,n}\right)\right] \end{aligned} \quad \ldots\ldots 18$$

Die Halbachsen der Ellipse, welche die Ebene 16 aus der Fläche 15 ausschneidet, haben daher dieselbe Länge.

Wir werden nun von der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{l_1^2} + \frac{y^2}{l_1^2} =$ sagen können, dass sie mit der benachbarten Ellipse kongruent ist, wenn die Halbachsen l_1 und l_2 mit den Halbachsen L_1 und L_2 bis auf unendlich Kleines 2. Ordnung zusammenstimmen. Es müssen daher in den Relationen 18 die Glieder mit dp verschwinden, es muss also sein:

$$m = g l_1^2 : d^2 \quad n = g l_2^2 : f^2 \quad \ldots\ldots\ldots 19$$

Setzen wir diese Werte in 17 und 16 ein, so erhalten wir dadurch die Gleichungen der im Raume gelegenen benachbarten kongruenten Ellipse:

$$\left.\begin{aligned} &1.)\ x^2\left(\frac{1}{l_1^2} - \frac{2\,dp}{g\,l_1^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{l_2^2} - \frac{2\,dp}{g\,l_2^2}\right) - 2\,xy\,\frac{dp}{g}\left(\frac{f^2}{d^2\,l_2^2} + \frac{d^2}{f^2\,l_1^2}\right) \\ &\quad + 2\,x\,dp\left(\frac{1}{d^2} - \frac{d^2}{g^2\,l_1^2}\right) + 2\,y\,dp\left(\frac{1}{f^2} - \frac{f^2}{g^2\,l_2^2}\right) + \frac{2\,dp}{g} - 1 = 0 \\ &2.)\ \frac{x\,d^2}{g\,l_1^2} + \frac{y\,f^2}{g\,l_2^2} + \frac{z}{dp} = 1 \end{aligned}\right\} \ldots 20$$

---

§ 5.

Mittelpunkt und Achsenrichtungen der benachbarten kongruenten Ellipse. Gleichungen derselben in Parameterform.

Die Koordinaten des Mittelpunktes der benachbarten kongruenten Ellipse haben die Werte:

$$x_0 = -r\,dp \quad y_0 = -s\,dp \quad z_0 = dp \quad \ldots . 21,$$

wenn wir zur Abkürzung r statt $\frac{l_1^2}{d^2} - \frac{d^2}{g^2}$ und s statt $\frac{l_2^2}{f^2} - \frac{f^2}{g^2}$ setzen und uns nur auf Glieder 1. Ordnung in dp beschränken.

Um die Richtung der Achsen zu finden, suchen wir die Koordinaten der Scheitel der Projektionsellipse (Fig. 3).

Da die Achse O′A′ mit der Achse OA den Winkel $\vartheta = -\frac{dp}{g}\left(\frac{f^2}{d^2 l_2^2} + \frac{d^2}{f^2 l_2^2}\right)\frac{l_1^2 l_2^2}{l_2^2 - l_1^2}$ bildet, so sind die Koordinaten des Scheitels A′ gegeben durch

$$x_0 + l_1,\ y_0 - l_1 \frac{dp}{g} t \ldots\ldots 22$$

und die Koordinaten des Scheitels B′ durch

$$x_0 + l_2 \frac{dp}{g} t,\ y_0 + l_2 \ldots\ldots\ldots 23,\ \text{wenn}$$

$\left(\frac{f^2}{d^2 l_2^2} + \frac{d^2}{f^2 l_1^2}\right)\frac{l_1^2 l_2^2}{l_2^2 - l_1^2}$ zur Abkürzung mit t bezeichnet wird.

Daraus ergeben sich nun die Koordinaten des Scheitels der benachbarten kongruenten Ellipse, in dem wir noch zu den obigen Koordinaten die entsprechende Z-Koordinate hinzusetzen, nämlich bei 22 $dp\left(1 + \frac{d^2}{gl_1}\right)$, bei 23 $dp\left(1 + \frac{f^2}{gl_2^2}\right)$.

Für die Richtungscosinuse der Halbachse l_1 erhalten wir dann die Werte 1, $-\frac{dp}{g} t$, $-\frac{d^2}{gl_1^2} dp$, für die der Halbachse l_2 die Werte $\frac{dp}{g} t$, 1, $-\frac{f^2}{gl_2^2} dp$.

Wir können nun sofort die Gleichungen der benachbarten Ellipse in Parameterform angeben, wenn wir als Parameter den Winkel φ einführen, den der vom Mittelpunkte ausgehende Radius vektor mit der Achse l_1 bildet.

Wir erhalten: $x = x_0 + l_1 \cos\varphi + l_2 \sin\varphi \frac{dp}{g} t$

$$y = y_0 + l_2 \sin\varphi - l_1 \cos\varphi \frac{dp}{g} t$$

$$z = dp\left(1 - l_1 \cos\varphi \frac{d^2}{gl_1^2} - l_2 \sin\varphi \frac{f^2}{gl_2^2}\right).$$

Ersetzen wir x_0, y_0 durch ihre Werte aus 21, so gehen diese Gleichungen über in

$$\left.\begin{aligned} x &= l_1 \cos\varphi - r\,dp + l_2 \sin\varphi \frac{dp}{g} t \\ y &= l_2 \sin\varphi - s\,dp - l_1 \cos\varphi \frac{dp}{g} t \\ z &= dp\left(1 - l_1 \cos\varphi \frac{d^2}{g l_1^2} - l_2 \sin\varphi \frac{f^2}{g l_2^2}\right) \end{aligned}\right\} \ldots . 24$$

Gleichungen der benachbarten kongruenten Ellipse in Parameterform.

Wir setzen die Gleichungen der ursprünglichen Ellipse bei, nämlich $x = l_1 \cos\varphi \quad y = l_2 \sin\varphi \quad z = 0$ 25

---

§ 6.

Zwei kongruente Räume mit konsentierendem Koordinatensystem, welche dadurch aufeinander bezogen sind, dass eine Ellipse des einen Raumes und die ihr entsprechende des anderen Raumes auf derselben Fläche 2. Ordnung in benachbarter Lage sich befinden. Die der F_2 entsprechende Fläche.

Durch die Gleichungen 24 und 25 sind Punkte der einen Ellipse den entsprechenden der ihr kongruenten benachbarten Ellipse zugeordnet. Wir wollen die Zuordnung noch verallgemeinern.

Denken wir uns nämlich zwei kongruente Räume Σ_1 und Σ_2, deren entsprechende Punkte in der Lage I zusammenfallen. Es werden sich dann auch die Punkte der Fläche $F_2^{(1)}$ (15) im Raume Σ_1 mit den entsprechenden Punkten der ihr kongruenten Fläche $F_2^{(2)}$ im Raume Σ_2 decken. Man bringe nun den Raum Σ_2 in die Lage II dadurch, dass man die mit dem Raum Σ_2 fest verbundene Fläche $F_2^{(2)}$ in die benachbarte Lage so überführt, dass sie auf der Ellipse $\frac{x^2}{l_1^2} + \frac{y^2}{l_2^2} = 1$ weiter gleitet.

Es entspricht dann in der Lage II jedem Punkt des Raumes Σ_1 ein Punkt des Raumes Σ_2.

Sind die Koordinaten eines Punktes im Raume Σ_1 gegeben durch x, y, z, und die des ihm entsprechenden Punktes des Raumes Σ_2 in Bezug auf das Koordinatensystem der x, y, z gegeben durch X, Y, Z, so ist die Zuordnung entsprechender Punkte beider Räume analytisch definiert durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X &= -r\,dp + x + y\frac{dp}{g}t + z\frac{dp}{g}\frac{d^2}{l_1^2} \\ Y &= -s\,dp - x\frac{dp}{g}t + y + z\frac{dp}{g}\frac{f^2}{l_2^2} \\ Z &= dp - \frac{x\,d^2}{g l_1^2}dp - \frac{y\,f^2}{g l_2^2}dp + z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 26.$$

Diese Formeln erhält man aus der bekannten Figur für die Koordinatentransformation unter Berücksichtigung von 24.

Mit Hilfe dieser Formeln kann man nun zu jeder Figur des Raumes Σ_1 die entsprechende des Raumes Σ_2 in der Lage II finden, sowie die Fortschreitungsrichtung eines jeden Punktes von Σ_1 zu seinem entsprechenden in Σ_2 angeben.

Es entspricht also z. B. die Ellipse 25 der Ellipse 24.

Wir wollen die der $F_2^{(1)}$ im Raume Σ_1 entsprechenden Fläche $F_2^{(2)}$ im Raume Σ_2 aufsuchen.

Setzen wir die Werte von 26 in 15 ein, so erhält man nach der Vereinfachung die Gleichung der benachbarten Fläche:

$$F - \frac{2\,dp}{g}\left[\frac{x^2}{l_1^2} + \frac{y^2}{l_2^2} - z^2\left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}\right) + xz\left(\frac{t}{f^2} + \frac{d^2}{c^2 l_1^2} - \frac{d^2}{l_1^4}\right)\right.$$

$$\left. + yz\left(\frac{t}{d^2} + \frac{f^2}{c^2 l_2^2} - \frac{f^2}{l_2^4}\right) + zg\left(\frac{l_1^2}{d^4} + \frac{l_2^2}{f^4} - \frac{2}{g^2} - \frac{1}{c^2}\right) - 1\right] = 0 \ldots 27.$$

Verbindet man die Gleichungen 15 und 27, so geht durch den Schnitt der beiden Flächen auch die Fläche mit der Gleichung

$$z\left[\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}\right)z + \left(\frac{2}{d^2} + \frac{d^2}{l_1^4} - \frac{t}{f^2} - \frac{d^2}{c^2 l_1^2}\right)x\right.$$

$$\left. + \left(\frac{2}{f^2} + \frac{f^2}{l_2^4} - \frac{t}{d^2} - \frac{f^2}{c^2 l_2^2}\right)y + \left(\frac{4}{g} + \frac{g}{c^2} - \frac{g l_1^2}{d^4} - \frac{g l_2^2}{f^4}\right)\right] = 0.$$

Die beiden kongruenten, benachbarten Flächen 2. Ordnung schneiden sich also nach 2 Ebenen, sie haben die Elipse $\frac{x^2}{l_1^2} + \frac{y^2}{l_2^2} = 1$ gemeinsam, der andere gemeinsame Kegelschnitt liegt in der Ebene mit der Gleichung

$$\left(\frac{2}{d^2} + \frac{d^2}{l_1^4} - \frac{t}{f^2} - \frac{d^2}{c^2 l_1^2}\right) x + \left(\frac{2}{f^2} + \frac{f^2}{l_2^4} + \frac{t}{d^2} - \frac{f^2}{c^2 l_2^2}\right) y$$
$$+ \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}\right) z + \left(\frac{4}{g} + \frac{g}{c^2} - \frac{g l_1^2}{d^4} - \frac{g l_2^2}{f^4}\right) = 0 \ldots . 28.$$

---

§ 7.

Bemerkenswerte Fortschreitungsrichtungen.

Bei Überführung des Raumes Σ_2 aus der Lage I in die Lage II beschreiben alle Punkte des Raumes Σ_2 Kurvenelemente. Eine Tangente an die Bahn ist Repräsentant der Fortschreitungsrichtung und hat daher nach 26 für den Punkt x, y, z in Parameterform die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \sigma\left(y\frac{t}{g} + \frac{z d^2}{g l_1^2} - r\right) \equiv x + \sigma A \\ Y &= y + \sigma\left(-\frac{xt}{g} + \frac{z f^2}{g l_2^2} - s\right) \equiv y + \sigma B \\ Z &= z + \sigma\left(1 - \frac{x d^2}{g l_1^2} - \frac{y f^2}{g l_2^2}\right) \equiv z + \sigma C \end{aligned}\right\} \ldots . 29$$

σ ist hierbei der Parameter, X, Y, Z sind die laufenden Koordinaten, das Verhältnis der Richtungscosinuse hat den Wert A : B : C . . . . . .

Wir betrachten nun folgende Fälle:

I.

Welche Punkte der F_2 in der Lage I rücken bei Überführung in die Lage II tangentiell zu ihr fort?

Es muss in diesem Falle die Fortschreitungsrichtung senkrecht stehen zur Normale der Fläche F_2 im Punkte x, y, z.

Die Richtungscosinuse der Normale stehen aber im Verhältnis

$$\left(\frac{x}{l_1^2}+\frac{z}{d^2}\right):\left(\frac{y}{l_2^2}+\frac{z}{f^2}\right):\left(\frac{x}{d^2}+\frac{y}{f^2}+\frac{z}{c^2}+\frac{1}{g}\right).$$

Daher erhalten wir die Bedingung

$$A\left(\frac{x}{l_1^2}+\frac{z}{d^2}\right)+B\left(\frac{y}{l_2^2}+\frac{z}{f^2}\right)+C\left(\frac{x}{d^2}+\frac{y}{f^2}+\frac{z}{c^2}+\frac{1}{g}\right)=0.$$

Wir erhalten somit die im § 6 gefundene Gleichung und damit die Bestätigung, dass sich die beiden benachbarten Flächen 2. Ordnung berühren und zwar längs zweier Kegelschnitte.

II.

Fortschreitungsrichtungen der Punkte einer Ebene.*)

Es sei $\alpha x+\beta y+\gamma z-p=0$ . . . . 30 die Gleichung der Ebene.

Dann gibt es nur einen einzigen Punkt in ihr, der senkrecht zur Ebene fortrückt.

Wir haben nämlich für diesen Fall die Bedingung

$$\alpha:\beta:\gamma = A:B:C.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich nun die Koordinaten dieses Punktes P, den wir den Nullpunkt nennen wollen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \left(-\beta g-\gamma s g+p\frac{f^2}{l_2^2}\right):N \\ P_y &= \left(\alpha g+\gamma r g-p\frac{d^2}{l_1^2}\right):N \\ P_z &= (\alpha s g-\beta r g+p t):N \end{aligned}\right\} \;\ldots.31$$

wobei N die Abkürzung für $\frac{\alpha f^2}{l_2^2}-\frac{\beta d^2}{l_1^2}+\gamma t$ ist.

Es gibt also zu jedem Punkt eine Ebene und umgekehrt. Diese Ebenen und die Punkte bilden somit ein Nullsystem. **)

Wir suchen ferner die Punkte der Ebene, deren Fortschreitungsrichtungen in die Ebene selbst fallen. Wir erhalten die Bedingung:

$$\alpha A+\beta B+\gamma C=0$$

*) Schell p. 287, 5. **) Schell p. 64.

oder $x\left(\frac{\beta t}{g}+\frac{\gamma d^2}{g l_1^2}\right)+y\left(-\frac{\alpha t}{g}+\frac{\gamma f^2}{g l_2^2}\right)+z\left(-\frac{\alpha d^2}{g l_1^2}-\frac{\beta f^2}{g l_2^2}\right)$

$$+(\alpha r+\beta s-\gamma)=0\ldots\ldots$$

oder $xD+yE+zF+G=0\ldots.32.$

Die gesuchten Punkte liegen also sowohl in dieser Ebene, als in der Ebene

$$\alpha x+\beta y+\gamma z-p=0\ldots\ldots$$

daher auf einer Geraden, der Charakteristik.

In jeder Ebene gibt es also einen Nullpol und eine Charakteristik.

Der Nullpol ist zugleich der Punkt, der sämtlichen Normalebenen zu den Fortschreitungsrichtungen der Punkte der Ebene 30 gemeinsam ist, d. h. diese Normalebenen bilden ein Ebenenbündel.*)

Ist nämlich $(X-x)A+(Y-y)B+(Z-z)C=0$ die Gleichung der Normalebene zur Fortschreitungsrichtung des Punktes x, y, z, der in der Ebene $\alpha x+\beta y+\gamma z-p=0$ liegt, so muss die Bedingung $(P_x-x)A+(P_y-y)B+(P_z-z)C=0$ erfüllt sein.

In der Tat ist $P_x A+P_y B+P_z C$**) $=-(\alpha x+\beta y+\gamma z-p)\left(t+\frac{d^2 s}{l_1^2}-\frac{f^2 r}{l_2^2}\right):N-(rx+sy-z)\ldots$

und $\qquad Ax+By+Cz=-(rx+sy-z)\ldots.$

Die Subtraktion beider Gleichungen gibt unter Berücksichtigung der Gleichung der Ebene identisch 0.

Die Normalebenen schneiden demnach die Ebene nach Geraden, welche durch den Nullpol gehen. Die zu den Punkten der Charakteristik gehörenden Normalebenen stehen senkrecht

---

*) Schell p. 287, 6.

**) Anm. Bei der Vereinfachung ist folgende Umformung vorzunehmen, z. B. für den Coëfficienten von x

$$\left(-\alpha t+\frac{\beta r d^2}{l_1^2}-\gamma t r-\frac{\alpha d^2 s}{l_1^2}\right):N=-\left[\alpha\left(t+\frac{d^2 s}{l_1^2}-\frac{f^2 r}{l_2^2}\right)\right.$$

$$\left.+r\left(\frac{\alpha f^2}{l_1^2}-\frac{\beta d^2}{l_1^2}+\gamma t\right)\right]:N=-a\left(t+\frac{d^2 s}{l_1^2}-\frac{f^2 r}{l_1^2}\right)-r,$$

zur Ebene und schneiden sich in einer Geraden, welche Normale ist zur Ebene im Nullpol. Es steht daher auch die Verbindungslinie des Nullpols mit einem Punkt der Charakteristik senkrecht zur Fortschreitungsrichtung dieses Punktes. Aus dieser Eigenschaft folgt aber nach einem geometrischen Satze, dass die Fortschreitungsrichtungen der Punkte der Charakteristik eine Parabel einhüllen, deren Brennpunkt der Pol, deren Scheiteltangente die Charakteristik ist.*)

Da die Ebene 32 senkrecht ist zur Ebene 30, so steht die Achse der Parabel senkrecht zu ersterer und hat somit die Gleichung

$$x = P_x + \lambda \left(\beta t + \frac{\gamma d^2}{l_1^2}\right),\ y = P_y + \lambda \left(-\alpha t + \frac{\gamma f^2}{l_2^2}\right),$$

$$z = P_z + \lambda \left(-\frac{\alpha d^2}{l_1^2} - \frac{\beta f^2}{l_2^2}\right), \ldots . 33$$

wobei λ Parameter ist.

Diese Gerade schneidet nun die Charakteristik im Punkte Q mit den Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= P_x - (gL : N.K)\left(\beta t + \frac{\gamma d^2}{l_1^2}\right) \\ Q_y &= P_y - (gL : N.K)\left(-\alpha t + \frac{\gamma f^2}{l_2^2}\right) \\ Q_z &= P_z - (gL : N.K)\left(-\frac{\alpha d^2}{l_1^2} - \frac{\beta f^2}{l_2^2}\right) \end{aligned}\right\} \ldots . 34$$

Hiebei ist $L \equiv t + \frac{s d^2}{l_1^2} - \frac{r f^2}{l_2^2}$

$$K \equiv \left(\frac{\beta t}{x} + \frac{\gamma d^2}{l_1^2}\right)^2 + \left(-\frac{\alpha t}{x} + \frac{\gamma f^2}{l_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha d^2}{l_1^2} + \frac{\beta f^2}{l_2^2}\right)^2$$

Daher hat die Entfernung PQ (Nullpol-Scheitel) den Wert $gL : N\sqrt{K}$ . . . . . .

Variiert man in den in II gefundenen Formeln die Grösse p, so verschiebt sich die Ebene 30 parallel, mit ihr die Charakteristik, die Nullpole und Scheitel rücken dann auf 2 Geraden weiter, welche parallel zu einander sind, da für jede von ihnen das Verhältnis der Richtungscosinuse denselben Wert hat, nämlich:

$$\frac{f^2}{l_2^2} : -\frac{d^2}{l_1^2} : t \ldots .$$

*) Schell p. 65.

Es ist diese Richtung unabhängig von der Stellung der Ebene im Raume*) und zwar ist sie senkrecht zur Parabelachse oder parallel zur Ebene, in welcher die Charakteristiken fortrücken. Es bleibt also auch die Entfernung PQ die gleiche, der Ausdruck für PQ ist deshalb unabhängig von p. Die Gleichung der Ebene, in welcher die Parabelachsen weiter rücken, ergibt sich aus der Elimination von p und λ aus den Gleichungen 33 und lautet:

$$x\left(\alpha M - \frac{f^2}{l_2^2} N\right) + y\left(\beta M + \frac{d^2}{l_1^2} N\right) + z\left(\gamma M - t N\right) -$$

$$g\left[\alpha\left(\frac{d^2}{l_1^2} - s t\right) + \beta\left(\frac{f^2}{l_2^2} + r t\right) + \gamma\left(\frac{s f^2}{l_2^2} + \frac{r d^2}{l_1^2}\right)\right] = 0 \quad \ldots\ldots 35$$

Hiebei bedeutet M den Wert $\frac{d^4}{l_1^2} + \frac{f^4}{l_2^2} + t^2$.

Unter den verschiedenen Lagen, welche eine Charakteristik im Raume hat, sind zwei ausgezeichnete, es kann nämlich die Charakteristik ins Unendliche fallen oder der Nullpol auf ihr liegen.

Wir betrachten zunächst ersteren Fall.

Damit die Charakteristik im Unendlichen liegt, müssen die Coëfficienten von x, y, z in der Gleichung der Ebene 32 Null werden.

Wir haben daher die Bedingungen:

$$\beta t + \gamma \frac{d^2}{l_1^2} = 0 \qquad -\alpha + \gamma \frac{f^2}{l_2^2} = 0 \qquad \frac{\alpha d^2}{l_1^2} + \frac{\beta f^2}{l_2^2} = 0$$

oder $\alpha = \sqrt{M}\,\frac{f^2}{l_2^2} \qquad \beta = -\sqrt{M}\,\frac{d^2}{l_1^2} \qquad \gamma = \sqrt{M}\,t.$

Die zur Charakteristik gehörige Ebene hat dann die Gleichung:

$$\frac{f^2}{l_2^2} x - \frac{d^2}{l_1^2} y + t z - \sigma = 0 \quad \ldots\ldots 36$$

wenn $\sigma = p : \sqrt{M}$.

---

*) Schell p. 65.

Es werden dann die Koordinaten des Nullpols S

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \left(\frac{d^2}{l_1^2} g - tsg + \sigma \frac{f^2}{l_2^2}\right) : M \\ S_y &= \left(\frac{f^2}{l_2^2} g + trg - \sigma \frac{d^2}{l_1^2}\right) : M \\ S_z &= \left(\frac{f^2}{l_2^2} sg + \frac{d^2}{l_1^2} rg + \sigma t\right) : M \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \; 37$$

Variiert man in diesem Falle p und damit σ, so geben diese Formeln die Gleichungen der Geraden, auf welcher die Nullpole S weiterrücken. Wir nennen diese Gerade die Centralachse des Systems.

Diese Centralachse steht aber senkrecht zur Ebene 36, daher ist sie die Gerade, deren Punkte auf ihr fortrücken. Die Nullpole eines Systems von Parallelebenen liegen demnach auf einer Parallelen zur Centralachse*) und ebenso die Scheitel der Parabeln dieses Systems, und zwar liegen die Centralachse und die beiden Parallelen in einer Ebene, nämlich der Ebene der Parabelachsen.

Es erfüllen nämlich die Koordinaten von 37 die Gleichung der Ebene 35.

In der Tat ist

$$S_x \left(\alpha M - \frac{f^2}{l_2^2} N\right) + S_y \left(\beta M + \frac{d^2}{l_1^2} N\right) + S_z (\gamma M - t N) -$$

$$g\left[\alpha \left(\frac{d^2}{l_1^2} - s t\right) + \beta \left(\frac{f^2}{l_2^2} + rt\right) + \gamma\left(\frac{sf^2}{l_2^2} + \frac{rd^2}{l_1^2}\right)\right] = \sigma N - \sigma N \equiv 0.$$

Die Centralachse schneidet also sämtliche Parabelachsen, und zwar unter rechten Winkeln.

Wir suchen noch das Verhältnis der Abschnitte, in welche die Entfernung PQ (Nullpol-Scheitel) einer Ebene durch den Durchstosspunkt mit der Zentralachse geteilt wird. Es genügt, nur die Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ zu betrachten.

Es ist $$\frac{PS}{SQ} = \frac{S_x - P_x}{Q_x - S_x} = \frac{S_x - P_x}{P_x - S_x + (g L : NK) \left(\beta t + \frac{\gamma d^2}{l_1^2}\right)}$$

$$= 1 : \left[(g L : N K) \left(\beta t + \frac{\gamma d^2}{l_1^2}\right) : (S_x - P_x) - 1\right]$$

---

*) Schell p. 65.

Es ist aber für diese Ebene

$$S_x = g\left[\left(\frac{d^2}{l_1^2} - ts\right) : M - \frac{f^2}{l_2^2}\left\{\alpha\left(\frac{d^2}{l_1^2} - ts\right) + \beta\left(\frac{f^2}{l_2^2} - tr\right) + \gamma\left(\frac{d^2}{l_1^2} r + \frac{f^2}{l_2^2} s\right)\right\} : MN\right]$$

$$P_x = -g\,(\beta + \gamma s) : N.$$

Daher

$$S_x - P_x = -g\left[-\beta(M - tL) + \gamma\left(-sM + \frac{d^2}{l_1^2} L\right) + (\beta + \gamma s)M\right]$$

$$: MN = g\left(\beta t + \gamma \frac{d^2}{l_1^2}\right) L : MN.$$

Daher wird $\frac{PS}{SQ} = 1 : (M : K - 1) = K : (M - K)$ $= K : N^2$, also auch $\frac{PS}{SQ} = \frac{\sqrt{K}}{N} : \frac{N}{\sqrt{K}}$.

Es bedeutet aber $\sqrt{K} : N$ die trigonometrische Tangente des Winkels ω der Centralachse mit der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Es ist nämlich $\cos\omega = \left(\alpha \frac{f^2}{l_2^2} - \beta \frac{d^2}{l_1^2} + \gamma t\right) : \sqrt{M} = N : \sqrt{M}$

daher $\operatorname{tg}\omega = \sqrt{M - N^2} : N = \sqrt{K} : N$, somit $PS : SQ = \operatorname{tg}\omega : \operatorname{ctg}\omega$.

Die Centralachse teilt also den Abstand Nullpol-Charakteristik im Verhältnis der Tangenten der Winkel, welche sie mit der Normale der Ebene und der Charakteristik bildet *).

Wir haben die zweite ausgezeichnete Lage der Charakteristik im Raume nun zu betrachten, nämlich den Fall, wenn der Nullpol auf der Charakteristik liegt.

In diesem Falle müssen seine Koordinaten die Gleichungen 30 und 32 erfüllen. Wir erhalten somit die Bedingung:

$$P_x\left(\beta \frac{t}{g} + \gamma \frac{d^2}{g l_1^2}\right) + P_y\left(-\alpha \frac{t}{g} + \gamma \frac{f^2}{l_2^2}\right)\left(+ P_z\left(\alpha \frac{d^2}{l_1^2} - \beta \frac{f^2}{l_2^2}\right)\right.$$

$$+ (\alpha r + \beta s - \gamma) = 0.$$

Da der Ausdruck links den Wert $-L : N$ hat, muss also sein $L = 0$.

Die Fläche 2. Ordnung muss also eine bestimmte Lage haben.

In diesem Falle geht die Parabel in die Charakteristik über, der Nullpol wird ein sich selbst entsprechender Punkt werden, wie die Betrachtungen im § 9 zeigen werden.

*) Schell p. 185.

III.

Fortschreitungsrichtungen der Punkte einer Geraden.

Die bisherigen Betrachtungen ergeben, dass es zu einer jeden Ebene einen in ihr liegenden Nullpol und umgekehrt gibt. Ferner liegt in jeder Ebene eine Parabel. Ist die Ebene senkrecht zur Zentralachse, so fällt die Parabel ins unendliche, erfüllt dagegen das System die Bedingung $L = 0$, so geht sie in die Charakteristik über. Die Charakteristiken selbst sind Scheiteltangenten der Parabeln. Es wird also nicht jede Gerade im Raume Charakteristik sein können. Die Bedingung hierfür werden sich aus den folgenden Betrachtungen ergeben.

Wir untersuchen zunächst die Fortschreitungsrichtungen der Punkte einer beliebigen Geraden. Es seien die Gleichungen derselben $X = x + \rho\alpha$, $Y = y + \rho\beta$, $Z = z + \rho\gamma$, wo X, Y, Z die laufenden Koordinaten, x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Punktes und ρ den Parameter bedeuten.

Die Tangente, längs welcher ein Punkt mit dem Parameter $\rho =$ const. bei Überführung des Systems Σ_2 aus der Lage I in die benachbarte Lage II fortrückt, hat dann nach 29 die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X &= x + \rho\alpha + \varepsilon A + \rho\varepsilon D \\ Y &= y + \rho\beta + \varepsilon B + \rho\varepsilon E \\ Z &= z + \rho\gamma + \varepsilon C + \rho\varepsilon F \end{aligned}\right\}$$

Hiebei ist ε variabler Parameter für die Punkte der Tangente.

Es stellen nun sowohl die Kurven $\rho =$ const. als $\varepsilon =$ const. Systeme von Geraden dar, welche auf einer Fläche liegen. Die Elimination von ρ und ε gibt sie als eine Fläche 2. Ordnung, und zwar ist sie ein hyperbolisches Paraboloid*), wie die Parameterdarstellung zeigt.

Wir suchen ferner die Einhüllende der Normalebenen zu den Fortschreitungsrichtungen der Punkte der Geraden.

Zum Punkt $x + \rho\alpha$, $y + \rho\beta$, $z + \rho\gamma$ gehört die Normalebene mit der Gleichung

$$(X - x - \rho\alpha)(A + \rho D) + (Y - y - \rho\beta)(B + \rho E) + (Z - z - \rho\gamma)(C + \rho F) = 0$$

oder

$$AX + BY + CZ + rx + sy - z + \rho(DX + EY + FZ + \alpha r + \beta s - \gamma) = 0.$$

*) Schell p. 286, 1.

Variiert ρ, so erhält man die verschiedenen Normalebenen, welche also ein Ebenenbüschel bilden.

Die Normalebenen zu den Fortschreitungsrichtungen der Punkte der Geraden mit den Gleichungen $X = x + \rho\alpha$ $Y = y + \rho\beta$ $Z = z + \rho\gamma$ schneiden sich demnach in einer Geraden mit den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ AX + BY + CZ + rx + sy - z = 0 \\ 2)\ DX + EY + FZ + G = 0 \equiv \alpha A_{(x)} + \beta B_{(y)} + \gamma C_{(z)} \end{array}\right\} \ldots 38$$

Letztere Ebene ist also parallel zur Geraden.

Diese Gerade nennt man die zur ursprünglichen Geraden konjugierte Gerade*). Für eine Normalebene ist der ihr zugehörige Punkt Nullpol, da seine Fortschreitungsrichtung senkrecht auf ihr steht. Rücken also die Nullpole auf einer Geraden fort, so drehen sich die zugehörigen Ebenen um die ihr konjugierte Gerade.

Ihre Richtungscosinuse stehen im Verhältnis:

$$(BF - CE) : (CD - AF) : (AE - BD)$$
$$= [\alpha L - \frac{f^2}{l_2^2}(\alpha A + \beta B + \gamma C)] : [\beta L + \frac{d^2}{l_1^2}(\alpha A + \beta B + \gamma C)]$$
$$: [\gamma L - t(\alpha A + \beta B + \gamma C)] \quad \ldots\ldots 39.$$

Wir betrachten spezielle Lagen der konjugierten Geraden.

Die Richtung der konjugierten Geraden ist bekannt, wenn $L = 0$ ist, die Fläche eine spezielle Lage hat. In diesem Falle ist das Richtungsverhältnis gegeben durch $\frac{f^2}{l_2^2} : - \frac{d^2}{l_1^2} : t$, die konjugierte Gerade ist also parallel zur Centralachse, sie fällt sogar mit ihr zusammen. Denn die Koordinaten der Centralachse erfüllen die Gleichungen 38. Es ist:

$$AS_x + BS_y + CS_z + rx + sy - z = - \frac{L}{\sqrt{M}}\left(\frac{f^2}{l_2^2}x - \frac{d^2}{l_2^2}y + tz - \sigma\right)$$

also gleich Null und $DX + EY + FZ + G = L\sqrt{M}$, also auch gleich Null.

Ist dagegen in der Relation 39 $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$, so hat die konjugierte Gerade die Richtungscosinuse $\alpha : \beta : \gamma$, und fällt ebenfalls mit der ursprünglichen Geraden zusammen. Denn

*) Schell p. 286, 1, p. 65, 7.

setzt man die Koordinaten der Geraden in die Gleichungen 38 ein, so werden diese identisch erfüllt. Die Normalebenen gehen also durch die Gerade selbst hindurch, die Fortschreitungsrichtungen sind somit senkrecht zur Geraden. Es genügt, wenn man weiss, dass einer ihrer Punkte x, y, z senkrecht zu ihrer Richtung fortschreitet. Denn diese Bedingung ist unabhängig von ρ.*)

Es ist nämlich $\alpha(A + \rho D) + \beta(B + \rho E) + \gamma(C + \rho F) = \alpha A + \beta B + \gamma C$, also gleich 0.

In beiden besprochenen Fällen fällt also die konjugierte Gerade mit der gegebenen zusammen. Eine solche Gerade nennt man Doppellinie**). Alle Geraden durch einen Punkt, welche senkrecht sind zur Fortschreitungsrichtung des Punktes, sind Doppellinien des Systems. Sie bilden einen Komplex 1. Ordnung***).

Wann liegt die konjugierte Gerade im Unendlichen?

1) Dieses tritt ein, wenn die Coëfficienten von X, Y, Z in der Gleichung Ebene 38, 1 Null sind, also $A = B = C = 0$, d. h. wenn der Punkt x, y, z, somit die gegebene Gerade im Unendlichen liegt.

2) Wenn die Coëfficienten D, E, F in der Gleichung der Ebene 38, 2 Null sind, also $\alpha : \beta : \gamma = \frac{f^2}{l_2^2} : -\frac{d^2}{l_1^2} : t$, d. h. die gegebene Gerade parallel ist zur Centralachse. Die Normalebenen sind dann parallel zu einander†), daher auch die Fortschreitungsrichtungen der Punkte der Geraden. Diese Fortschreitungsrichtungen werden im allgemeinen nicht mit der Geraden zusammenfallen. Dieses tritt ein††), wenn die Bedingung $A : B : C = \frac{f^2}{l_2^2} : -\frac{d^2}{l_1^2} : t$ erfüllt ist, wie wir das schon früher gesehen haben. Die Gerade ist die Centralachse selbst. Die Fortschreitungsrichtungen stehen senkrecht zur Geraden, wenn $A \frac{f^2}{l_2^2} - B \frac{d^2}{l_1^2} + C t = L = 0$ ist.

---

*) Schell p. 287, 4; **) Schell p. 68; ***) Schell p. 69; †) Schell p. 66; ††) Schell p. 66, 3.

3) Die konjugierte Gerade fällt auch noch ins Unendliche, wenn $A : B : C = D : E : F$. In diesem Falle ist auch der Punkt x, y, z im unendlichen, also die ganze Gerade.

Wann steht die konjugierte Gerade senkrecht zur gegebenen Geraden? In diesem Falle liegen die Fortschreitungsrichtungen in einer Ebene, die gegebene Gerade wird Charakteristik. Die Bedingung hierfür ist also:

$$L - \left(\alpha \frac{f^2}{l_2^2} - \beta \frac{d^2}{l_1^2} + \gamma t\right) (\alpha A + \beta B + \gamma C) = 0 \; \ldots . \; 40\text{*)}.$$

Kennt man also die Richtung einer Geraden, so kann sie nur Charakteristik sein, wenn sie ganz in die Ebene 40 fällt. Kennt man dagegen den Punkt, so erhalten wir unendlich viele Richtungen für die durch ihn hindurch gehenden Charakteristiken, die auf einen Kegel 2. Ordnung liegen, wie sich aus dem Folgenden ergibt.

IV.

Ort der Fortschreitungsrichtungen, die durch einen gegebenen Punkt gehen.**)

Da auf jeder Charakteristik ein Punkt liegt, dessen Fortschreitungsrichtung mit ihr zusammenfällt, so ist der Ort der Charakteristiken, die durch einen gegebenen Punkt gehen, derselbe, wie der der Fortschreitungsrichtungen, die durch diesen Punkt hindurch gehen. Es ergibt sich sofort aus 40, nämlich

$$L[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2]-\left[(X-x)\frac{f^2}{l_2^2}-(Y-y)\frac{d^2}{l_1^2}+(Z-z)\,t\right]$$
$$[(X-x)\,A+(Y-y)\,B+(Z-z)\,C]=0.$$

Hiebei sind x, y, z die Koordinaten des gegebenen Punktes, X, Y, Z die laufenden Koordinaten. Nach Umformung erhalten wir:

$$(X-x)^2\left[\frac{f^2}{l_2^2}A-L\right]+(Y-y)^2\left[-\frac{d^2}{l_1^2}B-L\right]+(Z-z)^2[t\,C-L]$$
$$+(X-x)(Y-y)\left[-\frac{d^2}{l_1^2}A+\frac{f^2}{l_2^2}B\right]+(X-x)(Z-z)\left[\frac{f^2}{l_2^2}C+t\,A\right]$$
$$+(Y-y)(Z-z)\left[-\frac{d^2}{l_1^2}C+t\,B\right]=0.$$

*) Schell p. 66, 3; **) Schell p. 292.

Der Ort ist also ein Kegel 2. Ordnung *), die Fortschreitungsrichtungen bilden daher einen Komplex 2. Ordnung**). Liegt der Punkt x, y, z auf der Centralachse selbst, so verschwinden die 3 letzten Glieder, der Kegel nimmt die Form an:

$$(X-x)^2\left(\frac{d^4}{l_1{}^4}+t^2\right)+(Y-y)^2\left(\frac{f^4}{l_2{}^4}+t^2\right)+(Z-z)^2\left(\frac{d^4}{l_1{}^4}+\frac{f^4}{l_2{}^4}\right)=0.$$

Er ist also imaginär.

Die Punkte, deren Fortschreitungsrichtungen mit den Erzeugenden des Kegels 2. Ordnung zusammenfallen, bilden auf ihm eine gewisse Kurve. Ihre Gleichungen erhalten wir, wenn wir das System

$$\left.\begin{aligned} x &= X+\varepsilon\left(Y\frac{t}{g}+Z\frac{d^2}{gl_1{}^2}-r\right)\\ y &= Y+\varepsilon\left(-X\frac{t}{g}+Z\frac{f^2}{gl_2{}^2}-s\right)\\ z &= Z+\varepsilon\left(1-X\frac{d^2}{l_1{}^2}-Y\frac{f^2}{l_2{}^2}\right)\end{aligned}\right\}\quad \text{cfr. 29}$$

nach X, Y, Z auflösen. Diese Gleichungen sagen aus, dass die Fortschreitungsrichtungen der Punkte X, Y, Z durch die Kegelspitze x, y, z gehen.

Es ergibt sich somit:

$$X=\left[x-\varepsilon A+\varepsilon^2\left(\frac{d^2}{gl_1{}^2}-\frac{st}{g}\right)+\frac{\varepsilon^2 f^2}{g^2 l_2{}^2}\left(\frac{xf^2}{l_2{}^2}-\frac{yd^2}{l_1{}^2}+zt\right)-\frac{\varepsilon^3 f^2}{g^2 l_2{}^2}L\right]:\left(1+\frac{\varepsilon^2}{g^2}M\right)$$

$$Y=\left[y-\varepsilon B+\varepsilon^2\left(\frac{f^2}{gl_2{}^2}+\frac{rt}{g}\right)-\frac{\varepsilon^2 d^2}{g^2 l_2{}^2}\left(\frac{xf^2}{l_2}-\frac{yd^2}{l_1{}^2}+zt\right)+\frac{\varepsilon^3 d^2}{g^2 l_1{}^2}L\right]:\left(1+\frac{\varepsilon^2}{g^2}M\right)$$

$$Z=\left[z-\varepsilon C+\varepsilon^2\left(\frac{rd^2}{gl_1{}^2}+\frac{sf^2}{gl_2{}^2}\right)+\frac{\varepsilon^2 t}{g^2}\left(\frac{xf^2}{l_2{}^2}-\frac{yd^2}{l_1{}^2}+zt\right)-\frac{\varepsilon^3 t}{g^2}L\right]:\left(1+\frac{\varepsilon^2}{g^2}M\right)$$

Die Kurve ist also eine Raumkurve 3. Ordnung, eine sog. kubische Ellipse***). Sie berührt in der Spitze die Fortschreitungsrichtung derselben, wie man ersieht, wenn ε in den Gleichungen sehr klein wird.

---

*) Vergleiche reziprok: Einhüllende der Fortschreitungsrichtungen, die in einer gegebenen Ebene liegen, ist eine Kurve 2. Klasse. § 7, II.

**) Schell p. 292.

***) Schell p. 293.

Liegt der Punkt xyz auf der Zentralachse, so müssen die Gleichungen der Kurve in die der Zentralachse übergehen.

In der Tat erhält man, wenn wir die Gleichungen 37 berücksichtigen,

$$\left.\begin{aligned} X &= \left[\frac{d^2}{l_1{}^2}\,g - tsg + (\varepsilon - \sigma L)\frac{f^2}{l_2{}^2}\right] : M \\ Y &= \left[\frac{f^2}{l_2{}^2}\,g + tsg - (\varepsilon - \sigma L)\frac{d^2}{l_1{}^2}\right] : M \\ Z &= \left[\frac{f^2}{l_2{}^2}\,sg + \frac{d^2}{l_1{}^2}\,rg + (\varepsilon - \sigma L)\,t\right] : M \end{aligned}\right\} \text{cfr. 37}$$

Das sind aber die Gleichungen für die Zentralachse.

Für den Fall $L = 0$ würde die Kurve von der 2. Ordnung werden.

---

§ 8.

Überführung der Punkte des Raumes Σ_2 aus der Lage I in die Lage II durch Rotation um 2 rechtwinklig gekreuzte Achsen oder durch eine Schraubung.

Bei Überführung des Raumes Σ_2 aus der Lage I in die Lage II gibt es in jeder Ebene in der Lage I nur einen Punkt P (Nullpol), der senkrecht zu dieser Ebene fortrückt. Dagegen gibt es unendlich viele Punkte der Ebene, welche in ihr fortrücken. Alle diese Punkte liegen auf der Geraden BQ, der Charakteristik (Fig. 4). Da der Nullpol P auf einer Normalen AP zur Ebene fortrückt, so ist diese ebenfalls Charakteristik, die zugehörige Ebene ist die Ebene APQ, welche senkrecht ist zu BQ, und Q ist ihr Nullpol.

Da nun nach § 7 die Verbindungslinie des Nullpols mit einem Punkt der Charakteristik senkrecht zur Fortschreitungsrichtung ist, so kann man vermuten, dass die Punkte der Charakteristik BQ durch unendlich kleine Rotation um AP als Rotationsachse und die Punkte der Charakteristik AP durch Rotation um BQ als Rotationsachse aus der Lage I in die Lage II übergeführt werden können. Ja es zeigt sich sogar, dass durch Rotation um beide Achsen überhaupt einen jeder

Punkt des Systems Σ_2, somit das ganze System, aus der Lage I in die Lage II übergeführt werden kann.

Wir wollen zunächst die Wege, welche die Punkte P und Q bei der Überführung aus der Lage I in die Lage II beschreiben, betrachten.

Der Weg eines beliebigen Punktes x, y, z ist nach Relation 26 gegeben durch:

$$\delta p \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Es wird daher der Weg des Punktes P (p. 16) erhalten, wenn wir seine Koordinaten in diese Formel einsetzen.

Es ist $P_y \frac{t}{g} + P_z \frac{d^2}{g l_1^2} - r = \alpha L:N$

$$- P_x \frac{t}{g} + P_z \frac{f^2}{g l_2^2} - s = \beta L:N \quad 1 - \frac{P_x d^2}{g l_1^2} - \frac{P_y f^2}{g l_2^2} = \gamma L:N,$$

daher Weg des Punktes P . . . . $\delta p \, L:N$ . . . 41 . . .

Ebenso ist: $\frac{Q_y t}{g} + \frac{Q_z d^2}{g l_1^2} - r = \alpha L:N +$

$$(L:NK) \left(- \alpha t^2 + \gamma \frac{f^2}{l_2^2} t - \alpha \frac{d^4}{l_1^4} - \beta \frac{f^2 d^2}{l_1^2 l_1^2}\right)$$

$$= \alpha L:N + (L:NK) \left(- \alpha M + \frac{f^2}{l_2^2} N\right) =$$

$$(L:N) \left(- \alpha N:K + \frac{f^2}{l_2^2} \frac{N}{K}\right)$$

$$= (L:K) \left(- \alpha N + \frac{f^2}{l_2^2}\right) \text{ u. s. f.}$$

daher Weg des Punktes Q (p. 18) . . . $\frac{\delta p L}{K} \sqrt{M - N^2} = \frac{\delta p L}{\sqrt{K}}$ . . . .

Da nun Punkt P durch Rotation um die Achse BQ in seine neue Lage kommen soll, so besteht, wenn $d\vartheta'$ die unendlich kleine Amplitude der Rotation ist, die Beziehung: $PQ \, d\vartheta' = \delta p L:N$, oder wenn wir den Wert von PQ einsetzen,

$$\frac{g L}{N \sqrt{K}} d\vartheta' = \frac{\delta p L}{N} \text{ oder } d\vartheta' = \frac{\delta p}{g} \sqrt{K}$$

also Amplitude der Rotation um die Charakteristik BQ:

$$d\vartheta' = \frac{\delta p}{g} \sqrt{K} \quad . . . \; 42$$

Ist $d\vartheta$ die unendlich kleine Amplitude der Rotation um die Charakteristik AP, so besteht für den Punkt Q die Beziehung:

$$PQ\ d\vartheta = \frac{\delta p L}{\sqrt{K}} \text{ oder } \frac{g L}{N\sqrt{K}}\ d\vartheta = \frac{\delta p L}{\sqrt{K}} \text{ oder } d\vartheta = \frac{\delta p N}{g}$$

also Amplitude der Rotation um die Charakteristik AP

$$d\vartheta = \frac{\delta p}{g} N \; \ldots\ldots\; 43$$

Für einen beliebigen Punkt R $(x_1\ y_1\ z_1)$ ist, wie wir schon vorhin gesehen haben, der zurückgelegte Weg gegeben durch

$$\delta p \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \; \ldots\ldots\; 44$$

wo A_1 etc. bedeutet, dass statt x, y, z x_1, y_1, z_1 gesetzt wurde.

Die Entfernung des Punktes R von AP ist nun gegeben durch

$$\sqrt{(P_x - x_1)^2 + (P_y - y_1)^2 + (P_z - z_1)^2 - (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - p)^2}$$

daher ist der bei der Rotation um AP zurückgelegte Weg

$$\frac{\delta p}{g} N \sqrt{(P_x - x_1)^2 + (P_y - y_1)^2 + (P_z - z_1)^2 - (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - p)^2}$$

Die Entfernung des Punktes R von der Charakteristik BQ hat den Wert

$$\sqrt{(x_1 D + y_1 E + z_1 F + G)^2 : K + (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - p)^2}$$

daher ist der bei der Rotation um BQ zurückgelegte Weg

$$\frac{\delta p}{g} \sqrt{x_1 D + y_1 E + z_1 F + G)^2 + K (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - p)^2}$$

Wir wollen jetzt beide Wege auf die X-Achse proizieren und suchen daher die Winkel ihrer Richtungen mit der X-Achse.

Die Ebene APR hat die Gleichung:

$$x\,[\beta\,(P_z - z_1) - \gamma\,(P_y - y_1)] + y\,[\gamma\,(P_x - x_1) - \alpha\,(P_z - z_1)]$$
$$+ z\,[\alpha\,(P_y - y_1) - \beta\,(P_x - x_1)] + \text{const.} = 0$$

also ist der cos des Winkels λ, den die Fortschreitungsrichtung des Punktes R bei der Rotation um AP mit der X-Achse bildet:

$$\cos\lambda = \frac{\beta\,(P_z - z_1) - \gamma\,(P_y - y_1)}{\sqrt{(P_x - x_1)^2 + (P_y - y_1)^2 + (P_z - z)^2 - (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - p)^2}}$$

Die Gleichung der Ebene BQR erhalten wir auf folgende Weise:

Jede Ebene durch BQ hat zufolge 38 die Gleichung

$$xD + yE + zF + G + \lambda\ (\alpha x + \beta y + \gamma z - p) = 0.$$

Da sie durch den Punkt $x_1\ y_1\ z_1$ geht, hat λ den Wert $-(x_1 D + y_1 E + z_1 F + G) : (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - p)$, daher cos des Winkels φ, den die Fortschreitungsrichtung des Punktes R bei der Rotation um BQ mit der X-Achse bildet:

$$\cos\varphi = \frac{y_1\left(\frac{t}{g} - \frac{\gamma}{g}N\right) + z_1\left(\frac{d^2}{g l_1^2} + \frac{\beta}{g}N\right) - p\left(\frac{\beta t}{g} + \frac{\gamma d^2}{g l_1^2}\right) - \alpha G}{\sqrt{K(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - p)^2 + (x_1 D + y_1 E + z_1 F + G)^2}}$$

Die Summe der Projektionen der beiden Wege auf die X-Achse hat daher den Wert:

$$\frac{\delta p}{g} N\,[\beta(Pz - z_1) - \gamma(Py - y_1)] + \frac{\delta p}{g}\left[y_1\left(\frac{t}{g} - \frac{\gamma}{g}N\right)\right.$$
$$\left. + z_1\left(\frac{d^2}{g l_1^2} + \frac{\beta}{g}N\right) - p\left(\frac{\beta t}{g} + \frac{\gamma d^2}{l_1^2}\right) - \alpha G\right] = \frac{\delta p}{g} A.$$

Proiizieren wir aber den Weg, den der Punkt $x_1\ y_1\ z_1$ in Wirklichkeit macht (cfr. 44), auf die X-Achse, so erhalten wir das gleiche Resultat.

Denn $\delta p \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \frac{A}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \delta p\, A.$

Wir ersehen somit, dass sich die wirkliche Bewegung aus den beiden Elementar-Rotationen nach dem Gesetz von Parallelogramm der Geschwindigkeiten zusammensetzen lässt.

Es kann also das System Σ_2 aus der Lage I in die Lage II durch Rotation um 2 konjugierte Charakteristiken übergeführt werden, d. h. um zwei konjugierte Gerade, welche senkrecht zu einander stehen. Unter diesen Paaren ist jenes ausgezeichnet, bei welchem die eine Charakteristik die Centralachse ist. Die andere Charakteristik ist dann im Unendlichen. Die Überführung aus der Lage I in die Lage II geschieht dann durch Rotation um die Centralachse und Translation in ihrer Richtung, also bei gleichzeitiger Folge durch eine Schraubung, so dass die Centralachse auch Schraubenachse genannt werden kann*).

Wir wollen die Amplitude und Translation der Schraubenbewegung berechnen.

---

*) Schell p. 158.

Proiizieren wir den wirklichen Weg des Punktes $x_1\ y_1\ z_1$ (cfr. 44) auf die Schraubenachse, so erhält die Projektion den

Wert $\frac{\delta p}{\sqrt{M}}\left(A_1 \frac{f^2}{l_1^2} - B_1 \frac{d^2}{l_1^2} + C_1 t\right) = \frac{\delta p\, L}{\sqrt{M}}$ .... 45.

Die Projektion des Weges irgend eines Punktes auf die Schraubenachse hat daher einen konstanten Wert, sie ist unabhängig von der Lage des Punktes. Oder: Zerlegen wir den Weg des Punktes in zwei Komponenten, parallel und senkrecht zur Schraubenachse, so hat die parallele Komponente einen konstanten Wert. Sie ist also gleich der Grösse der Translation.

Zieht man vom gegebenen Punkte aus die Normale zur Schraubenachse, so rückt ihr Fusspunkt bei der Überführung von der Lage I in die Lage II in der Schraubenachse selbst, also senkrecht zur Normalen weiter. Daher ist nach § 7, III die Fortschreitungsrichtung des Punktes selbst ebenfalls senkrecht zur Normalen, somit steht auch die zur Schraubenachse senkrechte Komponente normal zur Ebene, welche durch den Punkt und die Schraubenachse gelegt ist. Die Komponente kann daher nach dem Pythagoräischen Lehrsatz berechnet werden und hat den Wert:

$$\delta p \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 - L^2 : M}$$

$$= \delta p \sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)\left(\frac{f^4}{l_2^4} + \frac{d^4}{l_1^4} + t^2\right) : M - L^2 : M}$$

$$= \delta p \sqrt{\left[\left(A_1 \frac{d^2}{l_1^2} + B_1 \frac{f^2}{l_1^2}\right)^2 + \left(B_1 t + C_1 \frac{d^2}{l_1^2}\right)^2 + \left(C_1 \frac{f^2}{l_2^2} - A_1 t\right)^2\right] : M}.$$

Sind $S_x\ S_y\ S_z$ die Koordinaten des Fusspunktes der Normalen vom Punkte $x_1\ y_1\ z_1$ auf die Schraubenachse (cfr. 37),

so ist $S_x - x_1 = - g\left(B_1 t + C_1 \frac{d^2}{l_1^2}\right) : M,$

$$S_y - y_1 = - g\left(C_1 \frac{f^2}{l_2^2} - A_1 t\right) : M,$$

$$S_z - z_1 = - g\left(A \frac{d^2}{l_2^2} + B \frac{f^2}{l_2^2}\right) : M,$$

daher die Entfernung des Punktes $x_1\, y_1\, z_1$ von der Schraubenachse:

$$g \sqrt{\left[A_1 \frac{d^2}{l_1^2} + B_1 \frac{f^2}{l_2^2}\right)^2 + \left(B_1 t + C_1 \frac{d^2}{l_1^2}\right)^2 + \left(C_1 \frac{f^2}{l_2^2} - A_1 t\right)^2\right]} : M.$$

Somit erhält man aus beiden Relationen die Amplitude der Rotation um die Schraubenachse, nämlich

$$d\Theta = \frac{dp}{g} \sqrt{M} \quad \ldots . \; 46.$$

Für die Translation fanden wir bereits in 45 den Wert

$$dT = \frac{dp\, L}{\sqrt{M}}.$$

Beide Werte ergeben sich natürlich auch aus 43 und 41.

Ist $L = 0$, so ist die Translation Null, das System kann also durch einfache Rotation aus der einen Lage in die andere übergeführt werden.

---

§ 9.

Die XY-Ebene als Null-Ebene. Geometrische Deutung der dabei gefundenen Werte. Der Fall L = 0.

Nachdem wir gesehen haben, dass die Fläche 2. Ordnung durch eine Schraubung oder durch Rotation um zwei konjugierte Charakteristiken in die benachbarte Lage übergeführt werden kann, wollen wir als spezielle Nullebene die XY-Ebene nehmen. Dadurch ergibt sich dann eine geometrische Deutung der gefundenen Formeln.

Wir haben also in den früheren Relationen $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, $p = 0$ zu setzen. Der Nullpol P^0 (31) der Ebene hat dann die Koordinaten

$$P_x^0 = sg : t \quad P_y^0 = rg : t \quad P_z^0 = 0 \quad \ldots . \; 47,$$

die Charakteristik (32) hat die Gleichung

$$\frac{x\, d^2}{g\, l_1^2} + \frac{y\, f^2}{g\, l_2^2} - 1 = 0,$$

die Amplitude (43) der Rotation um die durch den Nullpol gehende und zur XY-Ebene senkrechten Achse hat den Wert

$$d\,\vartheta^0 = d\,p\,t : g,$$

die Amplitude (42) der Rotation um die in der Ebene liegende Charakteristik den Wert

$$d\,\vartheta_0' = \frac{d\,p}{g}\sqrt{\frac{d^4}{l_1^4}+\frac{f^4}{l_2^4}},$$

die Entfernung des Pols von der Charakteristik ist gegeben durch

$$(g\,L) : \left(t\sqrt{\frac{d^4}{l_1^4}+\frac{f^4}{l_2^4}}\right) \;.\;.\;.\;.\; 48.$$

Die Schraubenachse teilt diese Entfernung in zwei Teile (§ 7), welche sich wie $\frac{d^4}{l_1^4}+\frac{f^4}{l_2^4}$ zu t^2 verhalten, steht senkrecht auf ihr und bildet mit der Z-Achse einen Winkel, dessen Tangente den Wert $\sqrt{\frac{d^4}{l_1^4}+\frac{f^4}{l_2^4}} : t$ hat.

Verbindet man die Schnittpunkte der Charakteristik mit der Ellipse $\frac{x^2}{l_1^2}+\frac{y^2}{l_2^2}=1$ durch Gerade mit dem Nullpol, so sind diese Verbindungslinien Normale der Ellipse.

Die Koordinaten der Schnittpunkte sind nämlich:

$$x' = g l_1\left(\frac{d^2}{l_1}\pm\frac{f^2}{l_2^2}\sqrt{\frac{d^4}{g^2 l_1^2}+\frac{f^4}{g^2 l_2^2}-1}\right) : \left(\frac{d^4}{l_1^2}+\frac{f^4}{l_2^2}\right)$$

$$y' = g l_2\left(\frac{f^2}{l_2}\mp\frac{d^2}{l_1^2}\sqrt{\frac{d^4}{g^2 l_1^2}+\frac{f^4}{g^2 l_2^2}-1}\right) : \left(\frac{d^4}{l_1^2}+\frac{f^4}{l_2^2}\right)$$

daher Gleichung der Normalen in diesen Punkten:

$$\frac{x\,y'}{l_2^2}-\frac{y\,x'}{l_1^2} = x'\,y'\,\frac{l_1^2-l_2^2}{l_1^2\,l_2^2}.$$

Setzen wir die Koordinaten des Nullpols 47 in diese Gleichung ein, so ist $\frac{s g\,y'}{l_2^2\,t}+\frac{r g\,x'}{l_1^2}+x'\,y'\,\frac{l_1^2-l_2^2}{l_1^2\,l_1^2}=0$, d. h. der Nullpol ist der Schnitt der Normalen.

Wir suchen nun die Koordinaten des Pols der XY-Ebene in bezug auf die Fläche

$$\frac{x^2}{l_1^2}+\frac{y^2}{l_2^2}+\frac{z^2}{l^2}+\frac{2xt}{d^2}+\frac{2yt}{f^2}+\frac{2z}{g}-1=0.$$

Sie sind $x_1=-\frac{l_1^2 g}{d^2}$, $y_1=-\frac{l_2^2 g}{f^2}$, $z_1=g$ . . . . . 49.

Es wird somit die Gleichung der Charakteristik

$$\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+1=0.$$

Ist also P_1 die senkrechte Projektion des Flächen-Poles auf die XY-Ebene (Fig. 5), so ist die Charakteristik leicht zu finden, denn ihre Abschnitte auf den Koordinatenachsen sind gleich den negativ genommenen Koordinaten von P_1. Zieht man dann die Normalen in den Schnittpunkten C und D der Charakteristik mit der Ellipse, so ist deren Schnittpunkt N der Nullpol. Die Senkrechte von ihm auf die Charakteristik wird dann von der Schraubenachse geschnitten.

Da $-g:\sqrt{\frac{d^4}{l_1^4}+\frac{f^4}{l_2^4}}$ die Entfernung AB des Mittelpunktes von der Charakteristik ist und t die trigonometrische Tangente des Winkels ϑ, den die Charakteristik mit dem zu ihrer Richtung konjugierten Durchmesser bildet, so erhält man den Winkel, den die Schraubenachse mit der XY-Ebene bildet, indem man $AB \operatorname{tg}\vartheta$ als die ihm gegenüberliegende Kathete, g als die andere Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks nimmt. Daraus ergibt sich auch das Teilungsverhältnis, in welchem die Schraubenachse die Entfernung des Nullpoles von der Charakteristik teilt.

Wir haben nun noch den Fall $L=0$ zu besprechen.

Da die Entfernung des Nullpoles von der Charakteristik nach 48 gegeben ist durch

$$(gL):\left(t\sqrt{\frac{d^4}{l_1^4}+\frac{f^4}{l_2^4}}\right)$$

so hat diese im Falle $L=0$ den Wert Null, der Pol fällt auf die Charakteristik. Es muss demnach die Charakteristik eine Normale der Ellipse sein.

In der Tat lässt sich $L = t + \frac{sd^2}{l_1^2} - \frac{rf^2}{l_2^2}$ umformen in

$$\frac{f^2 d^2}{l_1^2 l_2^2 (l_2^2 - l_1^2) g^2}\left[\frac{g^2 l_2^6}{f^4} + \frac{g^2 l_1^6}{d^4} - (l_1^2 - l_2^2)\right].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer Null gesetzt, sagt aber aus, dass die Charakteristik $\frac{xd^2}{gl_1^2} + \frac{yf^2}{gl_2^2} - 1 = 0$ eine Normale der Ellipse $\frac{x^2}{l_1^2} + \frac{y^2}{l_2^2} = 1$ ist.

Der andere Schnittpunkt dieser Normalen ist dann der Punkt, in welchem die Rotationsachse die XY-Ebene trifft. Seine Koordinaten ergeben sich nach 34 zunächst in der Form

$$S_x^0 = -\frac{gs}{t} + \frac{d^2}{l_1^2 t}\frac{L}{M} \quad S_y^0 = \frac{gr}{t} - \frac{f^2}{l_2^2 t}\frac{L}{M} \quad S_z^0 = 0$$

Für $L = 0$ ergeben sie $-\frac{gs}{t}, \frac{gr}{t}$ o, also den Nullpol, der in diesem Falle mit dem Schnittpunkt zusammenfallen muss. Zugleich muss er aber auf der Ellipse liegen, es muss also die Gleichung

$$\frac{g^2 s^2}{l_1^2 t^2} + \frac{g^2 d^2}{l_2^2 t} = 1$$ erfüllt sein, wenn $L = 0$.

Es ist nun $\frac{g^2 s^2}{l_1^2} + \frac{g^2 r^2}{l_2^2} =$

$$g^2\left(+\frac{l_1^6}{d^4} + \frac{l_2^6}{f^4} + \frac{d^4 l_1^2}{g^4} + \frac{f^4 l_2^2}{g^4} - \frac{2 l_1^4}{g^2} - \frac{2 l_2^4}{g^2}\right) : l_1^2 l_2^2$$

oder vermöge der Bedingung

$$L = 0 = \frac{g^2 l_2^6}{f^4} + \frac{g^2 l_1^6}{d^4} - (l_1^2 - l_2^2)^2 \quad \ldots\ldots 50$$ geht der Ausdruck über in $[(l_1^2 d^4 + l_2^2 f^4) : g^2 - (l_1^2 + l_2^2)] : l_1^2 l_2^2$. Ersetzt man den Wert von g^2 aus 50 in dieser Relation, so erhält man als Endwert t^2. Der Durchstosspunkt liegt also auf der Ellipse.

Die Bedingung 50 lässt auch noch eine andere geometrische Bedeutung zu.

Benützt man die Koordinaten des Flächenpoles 47, so lässt sich die Gleichung umformen in $x_1^2 l_1^2 + y_1^2 l_2^2 = (l_1^2 - l_2^2)^2$.

Es entspricht also der Einhüllenden der Normalen der Ellipse reciprok diese Kurve der Pole, eine Ellipse. Fällt demnach die Projektion des Flächenpoles auf diese Ellipse, so kann die Fläche 2. Ordnung durch Rotation um eine Achse in die benachbarte Lage übergeführt werden.

---

§ 10.

Schlussbemerkung.

Die im § 3, § 6 Formel 28, § 7 Formel 37 gefundenen Werte gestatten sowohl die Einhüllende kongruenter Flächen 2. Ordnung mit gemeinsamer Ellipse als auch den Ort der Schraubenachsen zu berechnen. Letzterer ist in bezug auf den festen Raum eine Fläche C, in bezug auf die F_2 eine Fläche Γ*), welche auf C im allgemeinen rollen und gleiten muss, damit die mit Γ fest verbundene F_2 immer dieselbe feste Ellipse aus der XY-Ebene ausschneidet. Die Untersuchung der erwähnten Fragen sei für später vorbehalten. Es möge hier nur der einfachste Fall, der sich sofort rein geometrisch ergibt, erwähnt werden, nämlich der Fall, in welchem ein Cylinder 2. Ordnung seine Lage so verändert, dass er die feste XY-Ebene immer längs derselben Geraden (in der Figur 6 die Y-Achse) berührt. Die Schraubenachse wird hier Rotationsachse, die Fläche C ist eine Ebene durch die Gerade, normal zur XY-Ebene, also die YZ-Ebene, die Fläche Γ ein Cylinder, der als Leitkurve die Evolute der Leitkurve des Cylinders 2. Ordnung hat. Beim Rollen des Cylinders Γ auf der Ebene C wird der mit Γ verbundene Cylinder 2. Ordnung die feste XY-Ebene immer längs der Y-Achse berühren.

---

*) Schell p. 283.

Abkürzungen für § 6 — § 10.

$$r = \frac{l_1^2}{d^2} - \frac{d^2}{g^2} \quad s = \frac{l_2^2}{f^2} - \frac{f^2}{g^2} \quad t = \left(\frac{d^2}{f^2 l_1^2} + \frac{f^2}{d^2 l_1^2}\right) \frac{l_1^2 l_2^2}{l_2^2 - l_1^2}$$

$$A = \frac{yt}{g} + \frac{zd^2}{gl_1^2} - r \quad B = -\frac{xt}{g} + \frac{zf^2}{gl_2^2} - s \quad C = 1 - \frac{xd^2}{gl_1^2} - \frac{yf^2}{gl_2^2}$$

$$D = \frac{\beta t}{g} + \frac{\gamma d^2}{gl_1^2} \qquad E = -\frac{\alpha t}{g} + \frac{\gamma f^2}{gl_2^2} \qquad F = -\frac{\alpha d^2}{gl_1^2} - \frac{\beta f^2}{gl_2^2}$$

$$G = \alpha r + \beta s - \gamma, \quad L = t + \frac{sd^2}{l_1^2} - \frac{rf^2}{l_2^2}, \quad M = \frac{d^4}{l_1^4} + \frac{f^4}{l_2^4} + t^2,$$

$$N = \frac{\alpha f^2}{l_2^2} - \frac{\beta d^2}{l_1^2} + \gamma t \qquad K = D^2 + E^2 + F^2.$$

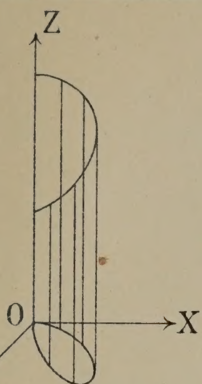


Fig. 1.

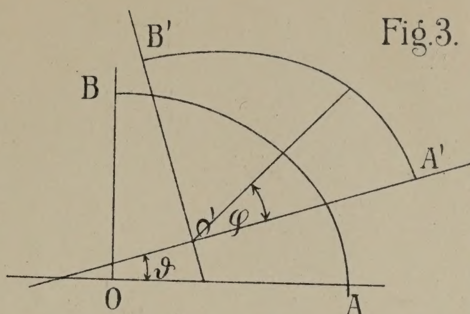


Fig. 3.

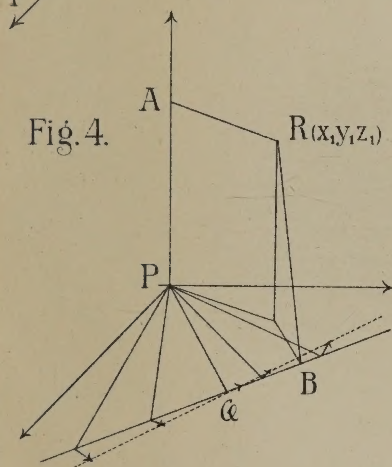


Fig. 4.

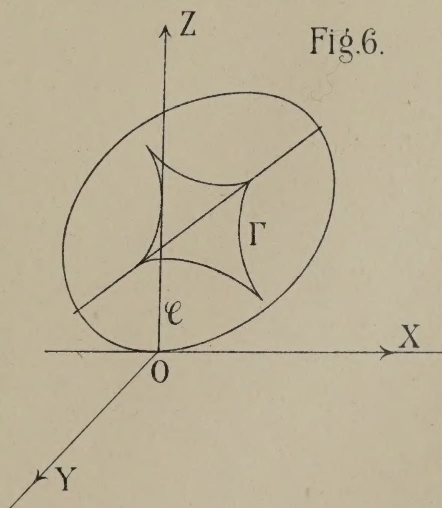


Fig. 6.

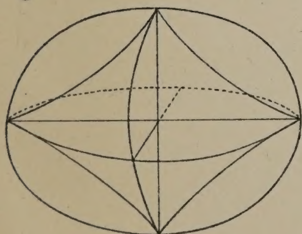


Fig. 2.

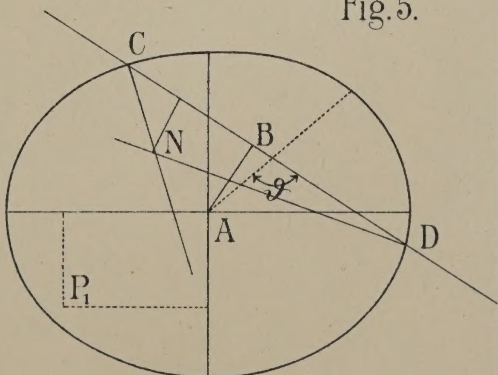


Fig. 5.